Математика для экономистов- 1

[1-й модуль, 2025-2026]

Озгур Эврен
Российская экономическая школа
oevren@nes.ru

Информация о курсе

Сайт курса: https://my.nes.ru

Приемные часы преподавателя: по договоренности

Время занятий: Четверг 15:30 - 17:00, Пятница 15:30 - 17:00

Кабинет: 427

Учебные ассистенты: Виктор Петухов (vpetukhov@nes.ru), Кирилл Зерников (kzernikov@nes.ru)

Описание курса

Это первая часть курса «Математика для экономистов», основной целью которого является обучение студентов базовым математическим инструментам, используемыми в экономике. Данная часть курса посвящена задачам статической оптимизации, параметрической оптимизации/сравнительной статике и теоремам о неподвижной точке.

Требования к курсу, система оценивания, правила посещения занятий

Итоговая оценка состоит из промежуточного экзамена (40%) и итогового экзамена (60%). Итоговый экзамен будет охватывать все пройденные темы. В соответствии с политикой РЭШ, студенты имеют право на пересдачу, если они пропустили итоговый экзамен по уважительной причине или не смогли получить проходной балл с первой попытки. Сложность заданий и система оценивания на пересдаче будут отличаться от тех, что были на предыдущем экзамене. Кроме того, каждую неделю будут назначаться домашние задания, которые не будут оцениваться.

Содержание курса

1. Оптимизация с ограничениями в виде равенств
2. Оптимизация с ограничениями в виде неравенств
3. Оптимизация выпуклых функций

4. Оптимизация квазивыпуклых функций
5. Непрерывность по параметру, теорема о максимуме, теорема Брауэра/Какутани о неподвижной точке
6. Супермодулярность и параметрическая монотонность
7. Сжимающие отображения и их неподвижные точки

Описание методологии курса

Если внешние обстоятельства будут позволять, преподаватель будет использовать традиционные методы работы в классе (то есть белую доску, маркер и устные обсуждения). В противном случае занятия будут проводиться онлайн. В любом случае студентам рекомендуется участвовать в лекциях, задавая вопросы и комментируя материал.

Материалы курса

Все материалы будут предоставляться на лекциях и доступны на my.nes.ru.

Политика академической честности

Списывание, плагиат и другие нарушения академической этики в РЭШ недопустимы.

Примеры заданий на курсе

1. Используя условия второго порядка, определите, является ли $(x*, y*) := (1, 0)$ локальным решением следующей задачи:

$\min x^3 + (x - x^2)y - y^3$, если $x^2 - y^2 = 1, (x,y) \in \mathbb{R}^2$?

2. Рассмотрите следующую параметрическую задачу оптимизации:

$\max 4\sqrt{x} + y$, если $10 - x - y \geq 0, y^2 \geq ax$, и $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$.

Найдите множество всех решений для случаев $a = 1/9$ и $a = 81$. Проверьте ваш ответ. (*Подсказка:* все критические точки являются целыми числами. Для каждого значения a, по сути, есть два случая для рассмотрения. В одном из этих случаев условия первого порядка не имеют существенного значения.)

3. **(i)** Пусть $f{:}R^n \to R$ и $g{:}R^m \to R$ являются вогнутыми функциями. Покажите, что $h(x,y) := f(x) + g(y)$ является вогнутой функцией от $(x,y) \in R^{n+m}$.

(ii) Пусть $u: R \to R$ является строго вогнутой функцией. Является ли $f(x) := u(x_1) + x_2$ строго вогнутой функцией от $x \in \mathbf{R}^2$? ***А что насчет*** $\boldsymbol{g(x) := u(x_1)}$ ***для*** $\boldsymbol{x \in R^2}$?

4. **(Модель сигнала).** Пусть $S \subseteq \mathbb{R}$ - множество действий, доступных индивиду. Выбранное им действие x можно наблюдать на рынке труда, также оно вознаграждается по ставке заработной платы $w(x)$. Например, каждое $x \in S$ может представлять собой некий диплом, приносящий ставку заработной платы $w(x)$. Однако рынок не может напрямую наблюдать тип индивида, θ. Типы принадлежат множеству $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, и более высокие типы соответствуют более производительным индивидам. Пусть $c(x, \theta)$ обозначает вещественнозначную функцию на $\mathbb{R}^2$, которая представляет (психологические или денежные) издержки действия x для индивида типа θ. Наконец, пусть $\pi(x, \theta) := w(x) - c(x, \theta)$ обозначает общий выигрыш от действия x для индивида типа θ.

   (i) Покажите, что $\pi(x, \theta)$ является (строго) супермодулярной функцией на $S \times \Theta$ тогда и только тогда, когда $-c(x, \theta)$ также является (строго) супермодулярной.

   (ii) Предположим, c является дважды дифференцируемой и непрерывной функцией на $\mathbb{R}^2$, такой что $\frac{\partial^2 c(x,\theta)}{\partial x \partial \theta} < 0$. Таким образом, предельные издержки действия x убывают с ростом типа индивида, что согласуется с нашим предположением о производительности. Покажите, что $-c(x, \theta)$ является строго супермодулярной на $\mathbb{R}^2$ (и, следовательно, на $S \times \Theta$). (*Подсказка:* нет необходимости вдаваться в подробности. Просто следуйте логике теоремы, изученной в классе).

   (iii) Пусть $x^*(\theta)$ обозначает оптимальное действие для типа $\theta \in \Theta$. То есть $x(\theta)$ максимизирует $\pi(\cdot, \theta)$ на S для любого заданного θ. Выведите, что $\theta > \theta'$ подразумевает $x(\theta) \geq x(\theta')$. (*Подсказка:* вы можете просто сослаться на теорему, изученную в классе, но будет лучше, если мы увидим, что вы понимаете доказательство этой теоремы.)

   (iv) Предположим $X = \{1, 2\}$, $\Theta = \{1, 2\}$ и $c(x, \theta) = \frac{x}{\theta}$. Скажем, что рынок отделяет индивидов высокого типа от низкого, если (a) $x^*(2) \neq x^*(1)$, и (b) эти оптимальные действия однозначно определены для обоих типов. Какие условия на $w(2)$ и $w(1)$ гарантировало бы такое разделение? (*Примечание:* Поздравляем! Вы только что получили краткое введение в модели сигнализирования.)